

6 Astra 审稿意见

归档信息：用户于 2026-10-11 提供，并确认审稿者为 6 Astra。以下保留所提供报告正文；其中 main 为原文残留的引用标记。未提供模型运行记录和审稿时间。

我的结论：这一版目前没有查出大的数学 gap。我通读了正文和附录 A-F，核查了主要证明，并对显式例子的公式做了独立符号复算。特别是最重要的多项式构造定理，以及“不属于 $\mathcal{D}_L \cup \mathcal{D}_P$ ”的论证，我没有发现需要加强核心假设、删除主要结论或重做关键证明的问题。

下面具体说明几个最值得检查的位置。

1. Fourier 判据：归一化没有被遗漏

Theorem 2.2 的潜在问题是：即使逆 Fourier 变换 $f \geq 0$ ，也不能不加证明就认定它是概率密度。

但附录 A 确实处理了这一步。设 $q = 1/M_U$ ，文中先由非退化性、对称性得到 $q \in L^1(\mathbb{R})$ ，然后证明

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\varepsilon x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} q(t) e^{-t^2/(2\varepsilon)} dt \longrightarrow q(0) = 1.$$

利用 $f \geq 0$ 和单调收敛，得到 $\int f = 1$ ，再证明 $\hat{f} = q$ 。所以“逆变换非负”到“存在所需概率分布”的推导是完整的，不是直接跳过去的。main

2. Hankel 判据：形式矩、真实分布和全实轴恒等式之间没有断缺

Theorem 2.3 最容易出大问题的地方，是从递推得到的矩列直接断言

$$\varphi_V(t) = \frac{1}{M_U(t)} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

这篇没有这样处理。它先用两组 Hankel 矩阵的半正定性，通过 Stieltjes 矩定理构造 $X \geq 0$ ，再令 $V = \epsilon\sqrt{X}$ ，其中 ϵ 是独立的对称符号。随后利用 $1/M_U$ 在原点附近解析，得到

$$0 \leq v_n \leq C(2n)! r_0^{-2n},$$

进而证明 V 存在局部指数矩。main

关键是接下来考虑

$$F(z) = M_U(z)\varphi_V(z) - 1.$$

这个函数在一条包含整条实轴的水平带内解析，并在原点附近恒等于零，所以由恒等定理得到全实轴上的倒数关系。这里没有预先假定 M_U 在整条带内无零点，因此不存在循环论证。main

此外，半正定条件与严格正定条件的等价，也有依据：存在共轭后，Fourier 判据给出 V 的绝对连续分布，非零多项式不可能在该分布下几乎处处为零。矩确定性也由指数矩单独证明了。main

因此，这部分不是只证明了“形式上的矩匹配”。

3. 核心多项式构造：两边的正性都是真正的全局正性

这是我检查得最仔细的部分。Theorem 3.1 不仅需要证明倒数是特征函数，还需要证明原函数确实是矩母函数。文中的两步分别解决了这两个问题。main

第一步，Laplace 卷积。

对于

$$k = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{P(t^2)} \right],$$

文中利用有理函数的极点结构证明了 k 具有指数可积性，并且 $\int k = 1$ 。重复极点只会增加多项式因子，不会破坏指数衰减。main

真正起作用的是一致估计

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{(\ell_\lambda * k)(x)}{\ell_\lambda(x)} - 1 \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |k(y)| (e^{\lambda|y|} - 1) dy = \delta_k(\lambda) \rightarrow 0.$$

因此, 当 $\delta_k(\lambda) < 1$ 时, 卷积在所有 $x \in \mathbb{R}$ 上严格为正。这里没有把逐点收敛错误地当成全局正性, 也没有遗漏空间尾部。main

第二步, **Gaussian** 多项式密度。

令 $Q(s) = (1 + bs)P(s)$ 、 $R(y) = Q(y^2)$ 。因为 $R(y) > 0$, 并且各个 $R^{(2j)}$ 的次数低于 R , 所以

$$C_j = \sup_{y \in \mathbb{R}} \frac{|R^{(2j)}(y)|}{R(y)} < \infty.$$

从而

$$S_\tau(y) \geq R(y) \left(1 - \sum_{j=1}^D \frac{C_j}{(2\tau)^j j!} \right) > 0$$

在充分大的 τ 下对所有实数 y 成立。附录随后验证了密度归一化、所有实指数矩存在, 以及其矩母函数确实等于

$$e^{\tau t^2/2} Q(t^2).$$

这些推导的符号与尺度是正确的。main

因此, 主定理所声称的量词

$$\exists b_0 > 0, \quad \forall b \geq b_0, \quad \exists \tau_0(b) > 0, \quad \forall \tau \geq \tau_0(b)$$

确实由证明支持, 并没有暗中要求一个对所有 b 都有效的统一 τ_0 。main

4. 排除 $\mathcal{D}_L$ 与 $\mathcal{D}_P$: 所用条件和外部定理匹配

排除 $\mathcal{D}_L$ 的理由成立: 选取的 P 有非实零点, 这会使

$$\varphi_U(z) = e^{-\tau z^2/2} (1 - bz^2) P(-z^2)$$

具有非实零点; 其余因子不会消除这些零点。main

对 $\mathcal{D}_P$, 我核对了 Konstantopoulos–Patie–Sarkar 的原始论文。它的 Theorem 4.1、式 (4.12) 确实给出

$$\log \mathcal{I}_\Psi(t) = \Phi_\Psi(t^2),$$

其中 Φ_Ψ 是 Bernstein 函数。因此, 文中使用的必要条件

$$\varphi_U \in \mathcal{D}_P \implies h_U(s) := \frac{1}{M_U(\sqrt{s})} \text{ 完全单调}$$

有正确的外部依据。Institut Fourier

之后的极点排除也成立: 完全单调且在零点取值为 1 的函数, 其概率 Laplace 表示在 $\Re z > 0$ 上满足 $|h(z)| \leq 1$ 。而

$$h(z) = \frac{e^{-\tau z/2}}{Q(z)}$$

在闭右半平面的非实零点处有不可消去的极点。内部极点与解析性矛盾; 虚轴上的边界极点也与从右侧趋近时的统一有界性矛盾。所以 $a_j = 0$ 的边界情形并未漏掉。main

5. 显式例子和精确阈值：复算一致

对于 $P(s) = 1 + s^2$, $b = 2$, $\tau = 4$, 我独立复算了部分分式、逆 Fourier 变换常数、 S_4 的展开及其归一化, 结果与正文和附录一致。

特别是

$$S_4(y) = 2y^2 \left(y^2 - \frac{13}{8} \right)^2 + \frac{27}{32}y^2 + \frac{7}{32} > 0,$$

以及另一侧密度中的

$$4 - \cos y + 3 \sin y \geq 4 - \sqrt{10} > 0,$$

都是严格的解析正性证明, 不依赖数值采样。main

Proposition 4.4 的阈值 $b \geq 2$ 也没有发现问题: 充分性来自特征函数乘积及概率混合; 必要性来自 $b < 2$ 时振荡项比非振荡正项衰减更慢, 从而迫使逆变换沿某个无界点列取负值。main

6. 其余结果也没有发现重大缺口

Corollary 2.4 的离散恢复不只是证明了有限阶矩匹配, 还处理了紧性、一致可积性及矩确定性, 因此弱收敛结论有完整依据。main

Theorem 2.5 的均值恒等式明确要求条件 (2.9), 并用它保证 Taylor 级数可以与期望交换; 对指数型增长整函数给出的充分条件也成立。这里没有把结果错误地推广到任意整函数。main

已知类的恢复部分, 无穷独立和的收敛, 以及 Gaussian 方差混合密度的有限性、连续性, 也都有相应证明。mainmain

所以, 这轮审核的意见是: 主要数学结果可以保留, 目前没有定位到必须修正的重大数学问题。这是对当前稿件的逐项数学核查结论, 不是形式化验证; 外部文献部分核对的是所引定理及适用条件, 没有把外部论文全部重新证明一遍。